Dérivation

1) Fonction dérivée de fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'
x^n	$n.x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$

2) Dérivée et opérations

Soient u et v deux fonctions dérivables.

Règle de calcul 1 (Dérivée d'une somme)

$u+v$ a pour dérivée $\boxed{u'+v'}$

Règle de calcul 2 (Dérivée d'un produit)

$u \times v$ a pour dérivée $\boxed{u'\,v+u\,v'}$

Remarque :

En particulier, si k est un nombre quelconque, on a $(ku)' = k \times u'$

Règle de calcul 3 (Dérivée d'un quotient)

Sur un intervalle où v n'est pas nulle, $\frac{u}{v}$ a pour dérivée

$$\boxed{\frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Remarque :

En particulier, on a $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

3) Tangente à une courbe

Remarque :

Pour un nombre a quelconque, le nombre $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

Propriété 4 (Équation de la tangente)

Cette tangente a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

4) Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété 5

Soit f une fonction dérivable.

- si $f'(x)$ est positive, alors f est croissante
- si $f'(x)$ est négative, alors f est décroissante

Propriété 6 (extremum et dérivée)

Si f admet un maximum ou un minimum en a,
alors $f'(a) = 0$

Propriété 7 (extremum et tangente)

Si f admet un minimum ou un maximum en a,
alors $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse a.

5) Étude d'un exemple : fonction polynôme de degré 2

Soit la fonction f définie sur $[5\,;\,25]$ par $f(x) = -x^2 + 28x - 136$.

1) Étudier les variations de la fonction f
2) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 12

Solution :

1) f est dérivable, avec

$$f'(x) = \boxed{-2x + 28}$$

On détermine pour quelles valeurs de x la fonction f est positive :

$$f'(x) > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad -2x > -28 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{x < 14}$$

D'où le tableau (après avoir calculé $f(5)$, $f(14)$, et $f(25)$) :

x	5		14		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-21	$\nearrow$	60	$\searrow$	-61

2) On calcule $f(12)$ et $f'(12)$ pour pouvoir appliquer la formule (Propriété 4) :

$$f(12) = -12^2 + 28 \times 12 - 136 = \boxed{56} \qquad \text{et} \qquad f'(12) = -2 \times 12 + 28 = \boxed{4}$$

On a donc :

- $a = 12$
- $f'(a) = 4$
- $f(a) = 56$

On applique la formule de l'équation de la tangente :

$$y = 4(x - 12) + 56 \quad = \quad 4x - 4 \times 12 + 56 \quad = \quad 4x + 8$$

La tangente a pour équation $\boxed{y = 4x + 8}$.

6) Étude d'un exemple : fonction homographique

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]4\,;\,9]$ par $f(x) = \dfrac{5x-19}{x-4} + 1$.

Solution :

f est dérivable, avec

$$f'(x) = \frac{5(x-4) - 1(5x-19)}{(x-4)^2} = \quad \dots \quad = \boxed{\frac{-1}{(x-4)^2}}$$

Pour tout $x \in]4\,;\,9]$, $\quad (x-4)^2$ est positif,
donc $f'(x)$ est négative,
donc f est décroissante.

Remarques :

- *Il est important d'écrire le raisonnement précédent, il rapporte des points !*
- *Attention à la valeur interdite ! (ici, 4, qui est en dehors de l'intervalle)*

D'où le tableau de variations :

x	4		9
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$6,2$