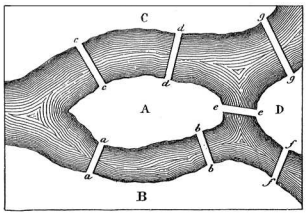
Graphes

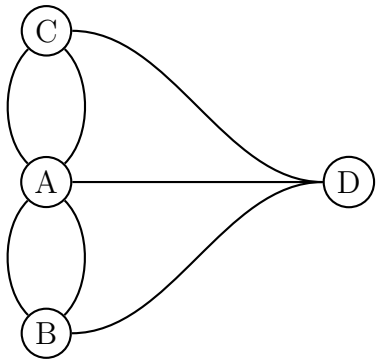
I- Représenter une situation

1) Graphe simple

Au XVIII e siècle les habitants de Königsberg aimaient se promener le dimanche et traverser les différents ponts de leur ville. Ils se demandaient s'il leur était possible de parcourir la ville en empruntant chacun des 7 ponts une fois et une seule.



Les ponts de Kœnigsberg en 1759.



Un promeneur veut traverser, une fois et une seule, chacun des sept ponts de la ville.

1) Peut-il trouver un itinéraire tel que la région d'arrivée soit la même que celle de départ ?

   Non

2) Peut-il trouver un itinéraire tel que les régions d'arrivée et de départ soient distinctes ?

   Non

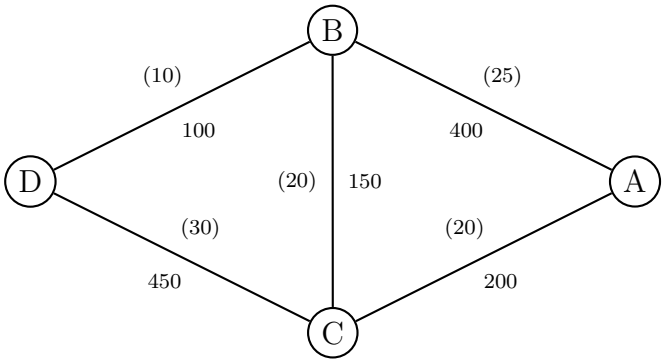
Définition 1 (Vocabulaire)

- Un graphe est composé de **sommets** reliés (ou non) par des **arêtes**
- Un chemin est une suite de sommets reliés par des arêtes.

2) Graphe pondéré

Le graphe G ci-dessous représente un réseau autoroutier reliant quatre villes notées A, B, C et D. Les nombres en couleur indiquent la distance entre deux villes, exprimée en kilomètres.

Les nombres entre parenthèses indiquent le prix des péages entre deux villes, exprimé en euros.



1) Déterminer la longueur, en kilomètres, du trajet D – C – A.

   650 km

Déterminer le trajet le plus court entre D et A.

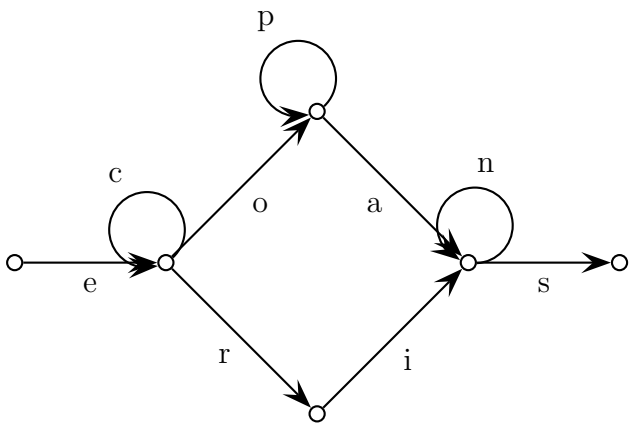
D - B - C - A : 650 km

2) Un automobiliste part de D pour aller en A. Quel est le trajet minimisant le prix du péage ?

D - B - A : 35 €

3) Graphe étiqueté

Le réseau intranet d'une entreprise doit être accessible à un grand nombre de personnes ayant chacune un code d'accès personnel. Cet accès est régi par le graphe étiqueté de la figure 21, noté G.



Les "étiquettes" sont les lettres e, c, m, p, a, r, i, n, s.

Un "mot" est accepté comme code d'accès si c'est une suite de lettres commençant par e et se terminant par s, associée à un chemin du graphe.

- Les mots acceptés les plus courts sont "eoas" et "eris"
- Les mots "ecopans" et "ecrins" sont des mots acceptés.
- Les mots "erinas" et "ecopanis" ne sont pas acceptés.
- Trouver un mot de 8 lettres qui soit reconnu commençant par "ec".

eccopans , ecrinnns, etc.

Définition 2 (Vocabulaire)

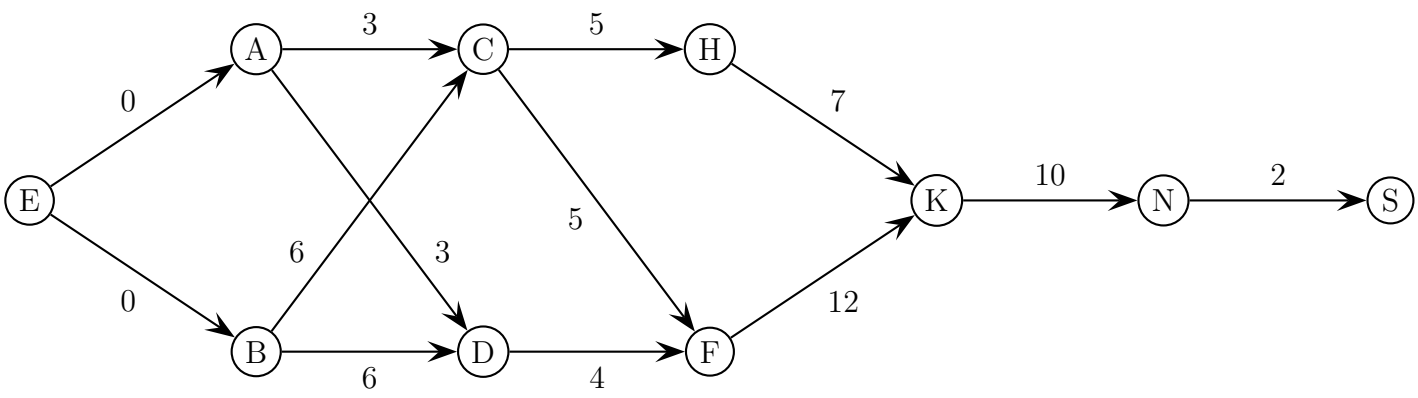
Lorsqu'une arête est orientée, on parle d'**arc**

II- Ordonnancement de tâches

La rénovation d'une salle de restaurant nécessite la réalisation de différentes tâches décrites dans l'échéancier suivant :

Code des tâches	Nom de la tâche	Durée (en heures)	Tâche antérieure
A	Acheter matériel	3	
B	Enlever la tapisserie	6	
C	Poser des tasseaux	5	A - B
D	Ragréer les murs	4	A - B
F	Peindre et laisser sécher	12	C - D
H	Poser les lambris	2	C
K	Poser la tapisserie	10	F - H
N	Nettoyer	2	K

Le graphe orienté pondéré G ci-dessous représente l'ordonnancement des tâches.



Le sommet E est l'entrée, le sommet S est la sortie.
Les deux arcs E → A et E → B ont un poids nul. Les autres arcs ont un poids strictement positif.

1) Quelle est la longueur (nombre d'arcs) des chemins allant de E à S ?

Tous les chemins sont de longueur 6

2) Donner le nombre de chemins de longueur 6 allant de E à S. Énumérer tous ces chemins.

Il y a 6 chemins allant de E à S :

- E- A - C - H - K - N - S
- E- A - C - F - K - N - S
- E- A - D - H - K - N - S
- E- B - C - H - K - N - S
- E- B - C - F - K - N - S
- E- B - D - H - K - N - S

3) Quel est, parmi les chemins de longueur 6, celui qui a un poids minimum ? Ce chemin permet-il d'exécuter toutes les tâches ?

E - A - C - H - K - N - S a pour poids 27, mais le temps est insuffisant pour exécuter la tâche F

4) Quel est le chemin de longueur 6 qui permet d'exécuter toutes les tâches ? Quel est le poids de ce chemin ?

E - B - C - F - K - N - S a pour poids 35, et permet d'exécuter toutes les tâches