Optimisation linéaire

I- Enoncé

Un service de restauration rapide propose deux types de sandwiches au fromage :

- le **mini** composé de : 1 pain rond et 1 tranche de fromage de 20 g,
- le **maxi** composé de : 1 pain rond et 2 tranches de fromage de 20 g chacune.

On dispose chaque jour de 500 pains et de 15 kg de fromage.
On note x le nombre de mini sandwiches et y celui de maxi sandwiches vendus par jour.

1) Exprimer à l'aide d'inégalités les contraintes en pain et fromage.
2) Peut-on vendre chaque jour :
   - 200 mini sandwiches et 300 maxi ?
   - 300 mini sandwiches et 200 maxi ?
3) a. Dans un repère orthonormé où 1 cm représente 50 unités, construire (on se limitera aux points d'abscisses positives) les droites D_1 et D_2 d'équations respectives :

$$y = -x + 500$$

$$y = -0,5x + 375$$

   b. Déterminer par un calcul les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_2.

   c. Déterminer graphiquement l'ensemble des points vérifiant les inégalités de la question 1). Justifier la démarche.
4) On réalise un bénéfice de 60 centimes sur un mini sandwich et de 80 centimes sur la vente d'un maxi.

   a. Montrer que si x mini et y maxi réalisent un bénéfice de 240 € , alors on a

$$0,6x + 0,8y = 240$$

   En déduire que les points de coordonnées $(x; y)$ sont sur une droite dont on déterminera l'équation.

   b. Représenter les droites correspondant respectivement à un bénéfice de : 240 € et 400 €.
5) En justifiant votre raisonnement, combien de mini et de maxi peut-on vendre pour réaliser un bénéfice maximal ?

II- Résolution et méthodes

1) Traduire des contraintes - quesions 1) et 2)

Méthode 1

En général, les inconnues x et y sont données, et il suffit de traduire les données de l'énoncé en inéquations.

Remarque :

- *Chaque information de l'énoncé ne correspond pas forcément à une contrainte.*
- *Les contraintes s'écrivent sous forme d'inégalité (avec $>$, $\leqslant$, etc.)*

Réponses :

1)
- Le nombre de pains doit être inférieur à 500 : $\boxed{x + y \leq 500}$
- On doit utiliser moins de 15 kg de fromage (15 000 g) : $\boxed{20x + 40y \leq 15000}$.

2)
- $200 + 300 = 500$, la contrainte de pain est respectée.
  $20 \times 200 + 40 \times 300 = 15200$, la contrainte de fromage n'est pas respectée.
  Donc on ne peut pas fabriquer 200 mini et 300 maxi.
- $300 + 200 = 500$, la contrainte de pain est respectée.
  $20 \times 300 + 40 \times 200 = 14000$, la contrainte de fromage est respectée.
  Donc on peut fabriquer 300 mini et 200 maxi.

2) Des contraintes aux droites - question 3)

Voir le graphique à la fin

Méthode 2

On transforme les inégalités en équations de droites

Remarque :

Les signes $<$, etc. sont maintenant des signes $=$.

Réponses :

3)
a. $D_1 : y = -x + 500$ $\qquad$ $D_2 : y = -0,5x + 375$
Voir figure à la fin.

b. On résoutl'équation $-x + 500 = -0,5x + 375$.
$-x + 500 + 0,5x = 375$
$-0,5x + 500 = 375$
$-0,5x = 375 - 500$
$-0,5x = -125$
$x = \dfrac{-125}{-0,5}$
Donc $\boxed{x = 250}$

Et $y = -x + 500 = -250 + 500 = \boxed{250}$

Le point I a pour coordonnées $(250, 250)$.

3) Régionnement, polygone

Méthode 3

Les inégalités du début permettent de hachurer une certaine région du graphique, au-dessus ou en-dessous des droites tracées

Remarque :

Hachurez légèrement et proprement.

Réponse :

3) c.
- $x + y \leqslant 500 \Leftrightarrow \boxed{y \leqslant -x + 500}$
- $20x + 40y \leqslant 15000 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y \leqslant 750 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y \leqslant -0,5x + 375}$

On considère donc les parties du plan situées simultanément sous les droites D_1 et D_2.

4) Optimisation - questions 4) et 5)

Méthode 4

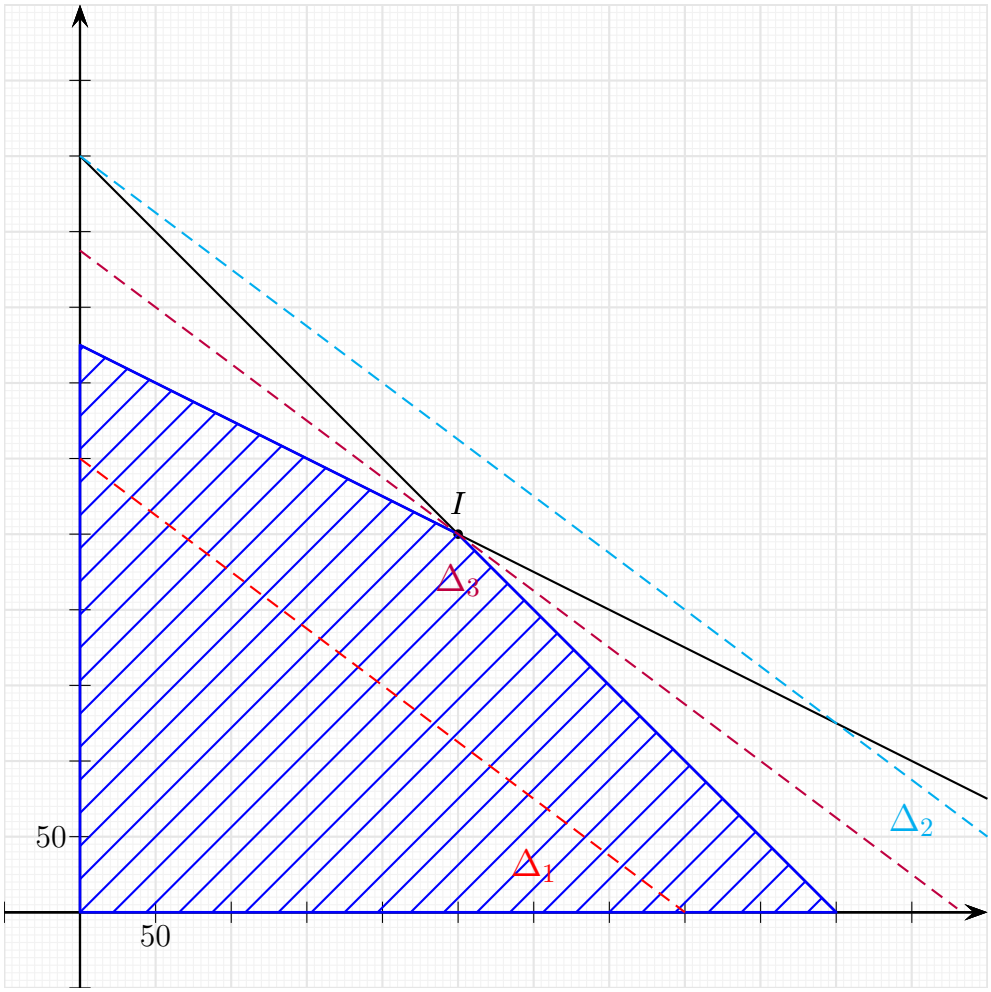
On trace des droites parallèles. L'une d'elles passera par l'un des sommets du polygone et réalisera l'optimisation cherchée.

Réponses :

4) a. 60 centimes vaut 0,6 euros, et 80 centimes vaut 0,8 euros. Le bénéfice vaut alors $0,6x + 0,8y$
D'où le résultat pour un bénéfice de 240 €

b.
- Pour un bénéfice de 240 € : $0,6x + 0,8y = 240$
ce qui est équivalent à $0,8y = -0,6x + 240$, ou alors $\boxed{y = -0,75x + 300}$ (droite Δ_1)
- Pour un bénéfice de 400 € : $0,6x + 0,8y = 400$
ce qui est équivalent à $0,8y = -0,6x + 400$, ou alors $\boxed{y = -0,75x + 500}$ (droite Δ_2)

5) On trace la droite des bénéfices parallèle à Δ_1 et Δ_2 passant dans (et même sur) le polygone des contraintes ayant la plus grande ordonnée à l'origine.
Elle passe par le point $I(250, 250)$, ce qui correspond à une production de 250 mini et 250 maxi.


I
Δ_3
Δ_2
Δ_1
50
50