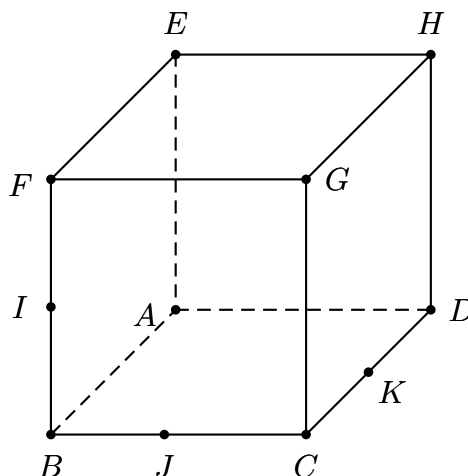


Devoir surveillé

Exercice n° 1

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



On ne demande aucune justification

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

Construire, sur la figure fournie en annexe et en laissant apparents les traits de construction :

- le point L ;
- l'intersection \mathcal{D} des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).

Exercice n° 2

On étudie un modèle de propagation d'un virus dans une population, semaine après semaine. Chaque individu de la population peut être, à l'exclusion de toute autre possibilité :

- soit susceptible d'être atteint par le virus, on dira qu'il est « de type S » ;
- soit malade (atteint par le virus) ;
- soit immunisé (ne peut plus être atteint par le virus).

Un individu est immunisé lorsqu'il a été vacciné, ou lorsqu'il a guéri après avoir été atteint par le virus.

Pour tout entier naturel n , le modèle de propagation du virus est défini par les règles suivantes :

- Parmi les individus de type S en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 85 % restent de type S, 5 % deviennent malades et 10 % deviennent immunisés ;
- Parmi les individus malades en semaine n , on observe qu'en semaine $n + 1$: 65 % restent malades, et 35 % sont guéris et deviennent immunisés.
- Tout individu immunisé en semaine n reste immunisé en semaine $n + 1$.

On choisit au hasard un individu dans la population. On considère les événements suivants :

S_n : « l'individu est de type S en semaine n » ;

M_n : « l'individu est malade en semaine n » ;

I_n : « l'individu est immunisé en semaine n ».

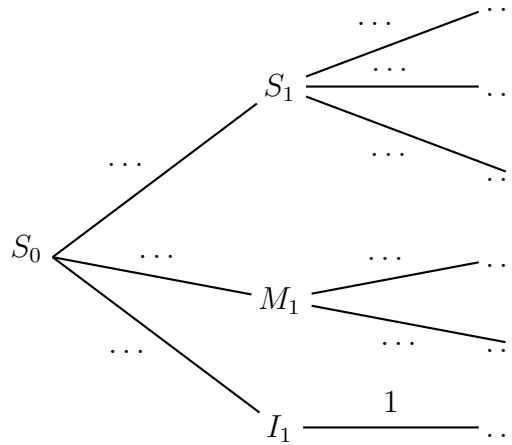
En semaine 0, tous les individus sont considérés « de type S », on a donc les probabilités suivantes :

$$P(S_0) = 1 ; P(M_0) = 0 \text{ et } P(I_0) = 0.$$

Partie A

On étudie l'évolution de l'épidémie au cours des semaines 1 et 2.

1) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilités donné ci-dessous :



2) Montrer que $P(I_2) = 0,2025$.

3) Sachant qu'un individu est immunisé en semaine 2, quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'il ait été malade en semaine 1 ?

PARTIE B

On étudie à long terme l'évolution de la maladie.

Pour tout entier naturel n , on : $u_n = P(S_n)$, $v_n = p(M_n)$ et $w_n = P(I_n)$ les probabilités respectives des évènements S_n , M_n et I_n .

1) Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n + v_n + w_n = 1$.

On admet que la suite (v_n) est définie par $v_{n+1} = 0,65v_n + 0,05u_n$.

2) À l'aide d'un tableur, on a calculé les premiers termes des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

	A	B	C	D
1	n	u_n	v_n	w_n
2	0	1	0	0
3	1	0,8500	0,0500	0,1000
4	2	0,7225	0,0750	0,2025
5	3	0,6141	0,0849	0,3010
6	4	0,5220	0,0859	0,3921
7	5	0,4437	0,0819	0,4744
8	6	0,3771	0,0754	0,5474
...
20	18	0,0536	0,0133	0,9330
21	19	0,0456	0,0113	0,9431
22	20	0,0388	0,0096	0,9516

Pour répondre aux questions **a.** et **b.** suivantes, on utilisera la feuille de calcul reproduite ci-dessus.

a. Quelle formule, saisie dans la cellule C3, permet par recopie vers le bas, de calculer les termes de la suite (v_n) ?

- b. On admet que les termes de (v_n) augmentent, puis diminuent à partir d'un certain rang N , appelé le « pic épidémique » : c'est l'indice de la semaine pendant laquelle la probabilité d'être malade pour un individu choisi au hasard est la plus grande.
Déterminer la valeur du pic épidémique prévue par ce modèle.
- 3) a. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,85u_n$.
En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
- b. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n ,

$$v_n = \frac{1}{4}(0,85^n - 0,65^n).$$

- 4) Donner les limites de chacune des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
Que peut-on en déduire quant à l'évolution de l'épidémie prévue à long terme par ce modèle ?

Exercice n° 3

Un protocole de traitement d'une maladie, chez l'enfant, comporte une perfusion longue durée d'un médicament adapté. La concentration dans le sang du médicament au cours du temps est modélisée par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a}(1 - e^{-\frac{a}{80}t})$$

où

- C désigne la concentration du médicament dans le sang, exprimée en micromole par litre,
- t le temps écoulé depuis le début de la perfusion, exprimé en heure,
- d le débit de la perfusion, exprimé en micromole par heure,
- a un paramètre réel strictement positif, appelé clairance, exprimé en litre par heure.

Le paramètre a est spécifique à chaque patient.

En médecine, on appelle « plateau » la limite en $+\infty$ de la fonction C .

Partie A : étude d'un cas particulier

La clairance a d'un certain patient vaut 7, et on choisit un débit d égal à 84.

Dans cette partie, la fonction C est donc définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = 12\left(1 - e^{-\frac{7}{80}t}\right).$$

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction C sur $[0 ; +\infty[$.
- 2) Pour être efficace, le plateau doit être égal à 15. Le traitement de ce patient est-il efficace ?

Partie B : étude de fonctions

- 1) Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - e^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

Démontrer que, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{105g(x)}{x^2}$, où g est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x}{40}e^{-\frac{3}{40}x} + e^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

2) On donne le tableau de variation de la fonction g :

x	0	$+\infty$
$g(x)$	0	-1

En déduire le sens de variation de la fonction f .

On ne demande pas les limites de la fonction f .

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, toute argumentation sera valorisée*

Peut-on affirmer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$?

4) Donner à l'aide de la calculatrice une valeur approchée de cette solution au dixième près.

Partie C : détermination d'un traitement adéquat

Le but de cette partie est de déterminer, pour un patient donné, la valeur du débit de la perfusion qui permette au traitement d'être efficace, c'est-à-dire au plateau d'être égal à 15.

Au préalable, il faut pouvoir déterminer la clairance a de ce patient. À cette fin, on règle provisoirement le débit d à 105, avant de calculer le débit qui rende le traitement efficace.

On rappelle que la fonction C est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$C(t) = \frac{d}{a} (1 - e^{-\frac{a}{80}t})$$

1) On cherche à déterminer la clairance a d'un patient. Le débit est provisoirement réglé à 105.

a. Exprimer en fonction de a la concentration du médicament 6 heures après le début de la perfusion.

b. Au bout de 6 heures, des analyses permettent de connaître la concentration du médicament dans le sang ; elle est égale à 5,9 micromole par litre.

Déterminer une valeur approchée, au dixième de litre par heure, de la clairance de ce patient.

2) Déterminer la valeur du débit d de la perfusion garantissant l'efficacité du traitement.

Le mal vient de ce que l'homme se trompe au sujet du bien. (Socrate)