Systèmes d'équations

I- Définitions

Définition 1

Un système de deux équations à deux inconnues s'écrit :

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

où a,b,c,a',b',c' sont des réels donnés, et x et y sont des inconnues.

Résoudre un système, c'est trouver, si il(s) existe(nt), le(s) couple(s) $(x; y)$ qui vérifie(nt) les deux équations en même temps.

II- Interprétation graphique

Méthode 2

Chaque équation d'un système peut être représentée dans un repère par une droite.
Dans ce cas :

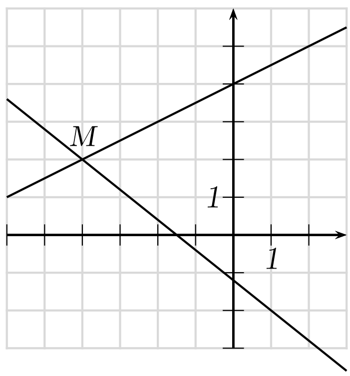
- Si les droites sont sécantes, les coordonnées de leur intersection est l'unique couple solution du système.
- Si les droites sont parallèles, le système n'admet aucune solution
- Si les droites sont confondues, le système admet une infinité de solutions données par tous les points de la droite.

Exemple :

Le système $\begin{cases} 4x & +5y & = -6 \\ x & -2y & = -8 \end{cases}$ *est équivalent à* $\begin{cases} y = & -0,8x & +1,2 \\ y = & 0,5x & +4 \end{cases}$.

Donc la solution du système est donnée par les coordonnées du point d'intersection des droites d'équations $y = -0,8x + 1,2$ *et* $y = 0,5x + 4$

Par lecture graphique, on trouve que la solution du système est (-4,2)



Vérification :

$$\begin{cases} 4 \times (-4) & +5 \times 2 & = -6 \\ -4 & -2 \times 2 & = -8 \end{cases}$$

III- Résolution

Méthode 3 (Combinaison)

Dans un système d'équation, on peut remplacer une ligne par :

- le produit ou le quotient de cette ligne par un nombre réel non nul
- la somme ou la différence des deux lignes

Exemple :

On résout le système précédent $\begin{cases} 4x & +5y & = -6 & (L_1) \\ x & -2y & = -8 & (L_2) \end{cases}$ *à l'aide de la méthode par combinaison :*

- *On remplace la ligne* (L_2) *par* $4 \times (L_2)$ *:*

$$\begin{cases} 4x & +5y & = -6 & (L_1) \\ 4x & -8y & = -32 & (L_2) \end{cases}$$

- *On remplace la (nouvelle) ligne* (L_2) *par* $(l_1) - (L_2)$ *:*

$$\begin{cases} 4x & +5y & = -6 \\ 4x - 4x & 5y - (-8y) & = -6 - (-32) \end{cases} \text{ qui est équivalent à } \begin{cases} 4x & +5y & = -6 \\ & 13y & = 26 \end{cases}$$

- *On trouve donc* $\boxed{y = 2}$ *et il ne reste qu'à le remplacer dans* (L_1) *pour trouver* $\boxed{x = -4}$.

Méthode 4 (Substitution)

On peut exprimer, dans une ligne, y en fonction de x (resp. x en fonction de y) et remplacer cette variable dans la seconde ligne, pour n'avoir plus qu'une équation en x (resp en y).

Exemple :

On résout le système précédent $\begin{cases} 4x & +5y & = -6 & (L_1) \\ x & -2y & = -8 & (L_2) \end{cases}$ *à l'aide de la méthode par substitution :*

- *Dans* (L_2)*, on exprime* x *en fonction de* y *:*

$$\begin{cases} 4x & +5y & = -6 & (L_1) \\ x = & -8 & +2y & (L_2) \end{cases}$$

- *Dans* (L_1)*, on remplace* x *par* $-8 + 2y$ *:*

$$\begin{cases} 4(-8 + 2y) + 5y = -6 & (L_1) \\ x = -8 + 2y & (L_2) \end{cases}$$

- *On résout l'équation dans* (L_1) *pour trouver* $\boxed{y = 2}$*, puis on calcule* x *dans* L_2 *pour trouver* $\boxed{x = -4}$

Méthode 5 (Équation d'une droite passant par deux points donnés)

Si on donne deux points de coordonnées $A(x;y)$ et $B(x';y')$, alors la droite (AB) a pour équation $y = ax + b$, où le couple $(a;b)$ est solution du système

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y' = ax' + b \end{cases}$$

Exemple :

- *Déterminer l'équation de la droite passant par les points* $A(2;4)$ *et* $B(7;0)$