Lois normales et fluctuation

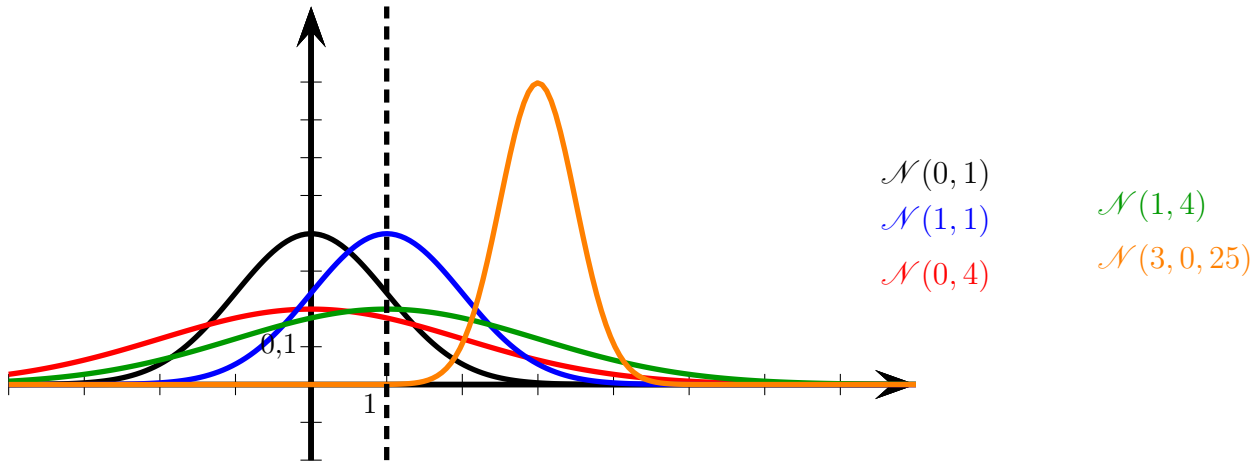
1) Lois normales $\mathscr{N}(m;\sigma^2)$

Définition 1

Pour un très grand nombre de répétitions dans le cadre d'une loi binomiale, on peut approcher le diagramme par la courbe de la loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$avec μ la moyenne et σ l'écart-type

Remarque :

- *μ est aussi appelée l'espérance de la loi.*
- *Pour une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, l'espérance vaut $\boxed{np}$ et l'écart-type vaut $\boxed{\sigma = \sqrt{np(1-p)}}$*



Remarque :

- *La courbe de la loi normale est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$*
- *Lorsque μ change, la courbe est décalée horizontalement*
- *Lorsque σ change, la courbe se rétrécit ou s'élargit, et sa hauteur change.*

Propriété 2 (Espérance et écart-type)

Si une variable aléatoire X suit une $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$, alors
$E(X) = \mu$ et $\sigma(X) = \sigma$

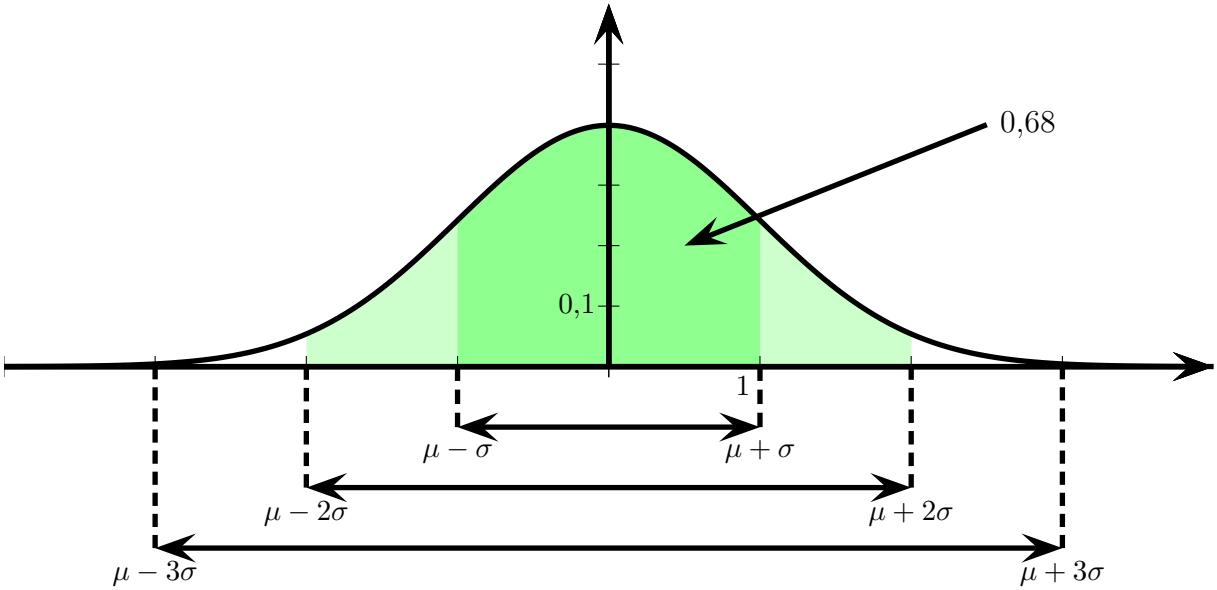
Méthode 3

Pour une variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathscr{N}(\mu;\sigma^2)$, il faut savoir calculer :

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(X \leq c)$ et $P(X \geq c)$
  (a, b et c étant des nombres réels donnés)
- p étant une probabilité donnée, le nombre a tel que
  $P(X \leqslant a) = p$, $P(X \geqslant a) = p$, $P(\mu - a \leqslant X \leq \mu + a) = p$

Propriété 4 (Valeurs particulières à connaître)

- $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,68$
- $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$ $\leftarrow$ c'est la probabilité à retenir
- $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$



2) Intervalles de fluctuation, intervalles de confiance

Définition 5 (Intervalle de fluctuation)

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire X au seuil de 95% est un intervalle centré en p qui contient X avec une probabilité de 95%.
Pour une variable aléatoire qui suit la $\mathscr{N}(\mu; \sigma^2)$, l'intervalle de fluctuation à 95 % est

$$I = [\mu - 2\sigma \; ; \; \mu + 2\sigma]$$

Méthode 6 (Règle de décision)

Il faut savoir utiliser un intervalle de fluctuation pour prendre une décision.
Dans un lot, on veut tester l'hypothèse selon laquelle "une valeur se trouve dans une proportion p".
On prélève dans ce lot un échantillon de taille n et on observe une fréquence f de la valeur.
La règle de décision adoptée étant la suivante :

- si f appartient à l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %, on admet l'hypothèse ;
- sinon, on rejette l'hypothèse.

Remarque :

Les exigences pour utiliser cette approximation sont :

$$n \geq 30, \quad np \geq 5 \quad et \quad n(1-p) \geq 5$$

Définition 7 (Intervalle de confiance)

Un intervalle de confiance pour une proportion p à un niveau de confiance de 95 % est un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

Méthode 8

On estime une proportion inconnue p grâce à un échantillon dont on a relevé une fréquence f : L'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient la proportion p au niveau de 95 %.

Remarque :

- *On se place dans le cas où l'échantillon contient au moins 30 éléments et où la fréquence f observée est telle que $nf \geq 5$ et $n(1-f) \geq 5$.*
- *L'amplitude de l'intervalle vaut $\frac{2}{\sqrt{n}}$, autrement dit, plus n augmente, plus l'intervalle se réduit et meilleure sera l'estimation de la proportion p.*