Nombres complexes

1) Principe

La résolution "par radicaux" au $XVI^{ème}$ siècle des équations du troisième degré ont nécessité l'introduction d'un nouveau nombre, de carré négatif, noté i, et d'un ensemble de nombres de la forme $z = x + iy$, l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Vocabulaire

Définition 1

x est la partie réelle ($Re(z)$), y est la partie imaginaire ($Im(z)$) du nombre complexe $z = x + iy$.
Le nombre $z = x + iy$ admet un « conjugué » : $\overline{z} = x - iy$

2) Second degré

Propriété 2

Toute équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ à coefficients réels, quel que soit le signe de son discriminant, admet des solutions dans $\mathbb{C}$ (p 238). En particulier, lorsque le discriminant est négatif, on a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exercice 91 : Un polynôme de degré 4 possède 4 racines.

3) Plan complexe

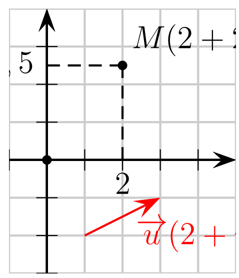
On peut représenter un nombre complexe dans un repère xOy, dont l'axe des abscisses est l'axe des réels et l'axe des ordonnées l'axe des imaginaires purs.

Tout **point** du plan $M(x;y)$ possède une affixe,
le nombre $z = x + iy$

Tout **vecteur** du plan $\overrightarrow{u}(x;y)$ possède une affixe, le nombre $z = x + iy$

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$

Pour la colinéarité, l'alignement, etc., on raisonne dans le plan complexe (affixes) comme dans le plan réel (coordonnées)(exercice 100)



4) Propriétés du conjugué (p 242)

Propriété 3 (Propriété géométrique)

Deux nombres conjugués sont les affixes de deux points symétriques par rapport à l'axe des réels

Propriété 4 (Propriétés opératoires)

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $\overline{\overline{z}} = z$ $\qquad z + \overline{z} = 2Re(z)$ et $z - \overline{z} = 2i\ Im(z)$
- z réel $\Leftrightarrow \overline{z} = z$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow \overline{z} = -z$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\qquad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$ $\qquad \overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ $\qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\qquad$ (si $z \neq 0$)

Méthode 5

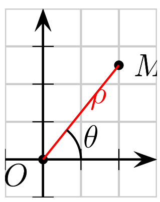
Pour se écrire un nombre complexe z avec un dénominateur réel, on peut utiliser son conjugué :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2}$$

5) Module et argument

Définition 6 (Représentation polaire)

Dans le repère complexe, un point M d'affixe $z = x + iy$ peut être défini à partir de sa distance à l'origine et par l'angle $\left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ (où $\vec{i}$ est le vecteur d'affixe 1)
Le nombre $\rho = OM$ est appelé module de z, noté $|z|$
Le nombre $\theta = \left(\overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ $[2\pi]$ est appelé argument de z, noté $arg(z)$.



Les propriétés (et leur démonstration) des modules et arguments 1 et 2 p 246 sont à connaître par coeur.

Propriété 7

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z.\overline{z}}$

Exemples : (*Quelques valeurs particulières*)

- $|0| = 0$
- $|1| = 1$ *et* $arg(1) = 0[2\pi]$
- $|i| = 1$ *et* $arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $|1 + i| = \sqrt{2}$ *et* $arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$

6) Forme trigonométrique

Propriété 8 (Lien entre les écritures)

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$$

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propriété 9 (Forme trigonométrique)

Avec les définitions précédentes, un nombre complexe z de module ρ et d'argument θ s'écrit :

$$z = \rho\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Exemples : (***Quelques valeurs particulières***)

- $1 = 1(\cos(0) + i\sin(0))$
- $i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$
- $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

7) Forme exponentielle

Propriété 10

La fonction

$$f : \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

vérifie les propriétés opératoires de l'exponentielle :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$$

Définition 11 (Forme exponentielle)

Tout nombre complexe z de module ρ et d'argument θ s'écrit sous forme exponentielle

$$z = \rho e^{i\theta}$$

Exemples : (***Quelques valeurs particulières***)

- $1 = e^{i0}$
- $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
- $1 + i = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

Propriété 12 (Une relation extraordinaire)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Propriété 13 (Conjugué)

$$\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$$

Propriété 14 (Module et argument d'un produit)

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

$$arg(zz') = arg(z) + arg(z')$$

Propriété 15 (Formules)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarques :

- *La propriété précédente permet de retrouver les formules de trigonométrie de* $1^{ère}$.
- *Les propriétés de l'exponentielle s'appliquent.*
- *Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument.*

8) Lien avec la géométrie

Propriété 16 (Distance)

Pour deux points A et B du plan, on a :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Propriété 17 (Angle)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)$$

Remarque : (*Conséquence*)

Pour quatre points A, B, C, D du plan, on a :

$$\left(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

Méthode 18 (Démontrer en géométrie)

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles lorsque le quotient $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel.
- même raisonnement pour trois points alignés.
- Deux droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires lorsque le quotient $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

Méthode 19 (Triangle équilatéral)

Un triangle ABC est équilatéral lorsque (à l'ordre des sommets près) :

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$

Démonstrations

Propriété 5

Pour tout nombre complexe $z \neq 0$,
$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)}$
$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} &= \overline{\left(\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}\right)} \\ &= \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} \\ &= \overline{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

- $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{x-iy}$
$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{z}} &= \frac{x+iy}{(x-iy)(x+iy)} \\ &= \frac{x+iy}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

Donc $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$

Propriété 6

Si z_1 est racine d'un polynôme défini par $P(z) = az^2 + bz + c$, alors $\overline{z_1}$ est aussi racine du polynôme P.

$$\begin{aligned}P\left(\overline{z_1}\right) &= a\overline{z_1}^2 + b\overline{z_1} + c \\ &= \overline{az_1^2} + \overline{bz_1} + \overline{c} && \text{car } a, b, c \text{ sont des réels donc } a = \overline{a}\ ,\ b = \overline{b} \text{ et } c = \overline{c} \\ &= \overline{az_1^2 + bz_1 + c} && \text{(propriétés du conjugué 3 p 242)} \\ &= \overline{P(z_1)} \\ &= \overline{0} && \text{car } z_1 \text{ est racine de } P \\ &= 0 && \text{car 0 est un réel}\end{aligned}$$

Propriété 10

La fonction

$$f : \theta \longmapsto \cos\theta + i\sin\theta$$

vérifie les propriétés opératoires de l'exponentielle :

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(\theta + \theta') = f(\theta)f(\theta')$$

Propriété 15 (Formules)

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Propriété 17 (Angle)

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan, on a :

$$(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v}) = \arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)$$

Méthode 19 (Triangle équilatéral)

Un triangle ABC est équilatéral lorsque (à l'ordre des sommets près) :

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A)$$