Opérations sur les matrices - Inversion

I- Exemple : Résolution d'un système

Un système de deux équations à deux inconnues (S) : $\begin{cases} ax_1 + bx_2 = r_1 \\ cx_1 + dx_2 = r_2 \end{cases}$
peut se traduire par une égalité matricielle $\boxed{A \times X = R}$

avec $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\quad R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$.

Puisque résoudre ce système, c'est déterminer les valeurs de x et x_2, alors il s'agit dans l'expression matricielle précédente d'isoler X et de l'exprimer en fonction de A et R :

$$X = A^{-1} \times R$$

II- inversion

Propriété 1 (Inversion)

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible lorsque

$$ad - bc \neq 0$$

.
Dans ce cas, son inverse A^{-1} vaut

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Remarque :

En référence au système d'équations du début, l'expression $ad - bc \neq 0$ traduit le fait que le système possède une solution, et qu'elle est unique.

Règle de calcul 2 (Solutions d'un système de deux équations à deux inconnues)

Le système (S) du début a pour solution

$$X = A^{-1} \times R = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

Soit

$$x_1 = \frac{1}{ad-bc}(dr_1 - br_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{ad-bc}(-cr_1 + ar_2)$$